Wykład 12 (30.05.2019)

Materiał do samodzielnego przestudiowania, obowiązujący na egzaminie

Geometria w ujęciu analitycznym

Przyjmujemy za Kartezjuszem (René Descartes, 1596-1650), że przez odniesienie do wybranego układu współrzędnych każdy punkt płaszczyzny można jednoznacznie wyznaczyć (odróżnić od innych punktów) przez podanie dwóch liczb — współrzędnych tego punktu. Wybór układu polega na wyborze punktu początkowego układu współrzędnych zwanego *środkiem układu współrzędnych* oraz dwóch osi układu, zazwyczaj przyjmowanych jako wzajemnie prostopadłe. W ten sposób powstaje bijekcja:

(Płaszczyzna Euklidesa) $\Pi \ni p \longleftrightarrow (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ **(płaszczyzna Kartezjusza)**

Punkt odpowiadający wektorowi zerowemu, $0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ jest punktem przecięcia osi współrzędnych — można go wybrać dowolnie przy ustalaniu wspomnianej bijekcji. Na płaszczyźnie Euklidesa nie ma wyróżnionego punktu.

W analogiczny sposób modelujemy postrzeganą (obserwowaną) przestrzeń trójwymiarową za pomocą kartezjańskiej przestrzeni trójwymiarowej $\mathbb{R}^3$.

Przesunięcia w przestrzeni $\mathbb{R}^n$

Definicja (Przesunięcia i odwzorowania afiniczne w przestrzeni)

a) Przesunięciem o wektor $u \in \mathbb{R}^n$ nazywamy odwzorowanie

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \tau_u(x) = x + u \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

b) Złożenie przesunięcia τ_u z odwzorowaniem liniowym $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nazywamy odwzorowaniem afinicznym. Jest ono wyrażone wzorem

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \tau_u \circ \phi(x) = Ax + u \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

gdzie A oznacza macierz odwzorowania ϕ.

Dla każdego wektora $u \in \mathbb{R}^n$ odwzorowanie τ_u jest bijekcją przestrzeni $\mathbb{R}^n$ z nią samą, a odwrotnym do niego jest przesunięcie o wektor przeciwny do u, $\tau_u \circ \tau_{-u} = \mathrm{id}$. Ponadto dla dowolnych u, $v \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$\tau_u \circ \tau_v = \tau_{u+v}.$$

Poza przypadkiem $u = 0$ przesunięcie τ_u nie jest odwzorowaniem liniowym, zatem także nie jest liniowe złożenie $\tau_u \circ \phi$!

Podstawowe definicje dla przypadku $\mathbb{R}^n$

Na początek wskażemy najprostsze figury geometryczne w wielowymiarowej przestrzeni, takie jak proste, płaszczyzny i ich więcej wymiarowe odpowiedniki.

Definicja (Rozmaitości afiniczne w $\mathbb{R}^n$)

Będziemy nazywać:

- prostą w $\mathbb{R}^n$ — przesunięcie jednowymiarowej podprzestrzeni liniowej w $\mathbb{R}^n$ — $L = \tau_v(\mathrm{lin}\{u\})$;
- płaszczyzną (dwuwymiarową) w $\mathbb{R}^n$ — przesunięcie dwuwymiarowej podprzestrzeni liniowej w $\mathbb{R}^n$ — $P = \tau_v(\mathrm{lin}\{u, w\})$;
- Ogólniej — k-płaszczyzną (k-wymiarową płaszczyzną) nazywamy przesunięcie k-wymiarowej podprzestrzeni liniowej w $\mathbb{R}^n$.
- hiperpłaszczyzną w $\mathbb{R}^n$ — przesunięcie $(n-1)$-wymiarowej podprzestrzeni liniowej w $\mathbb{R}^n$.
- Przestrzenią kierunkową prostej, odpow. płaszczyzny, hiperpłaszczyzny, będziemy nazywać tę podprzestrzeń liniową, której przesunięciem jest dana prosta, odpow. płaszczyzna itd.
- Rozmaitości afiniczne o tej samej przestrzeni kierunkowej nazywamy równoległymi.

Prosta w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ I

Zgodnie ze szkolną definicją *prosta* na płaszczyźnie kartezjańskiej $\mathbb{R}^2$ jest określona jako zbiór punktów spełniających równanie

$$a_1x_1 + a_2x_2 = a_3, \qquad \text{gdzie} \quad a_1,\, a_2,\, a_3 \in \mathbb{R}, \quad a_1^2 + a_2^2 \neq 0, \tag{3}$$

Na podstawie wiadomości o układach liniowych widzimy, że zbiór rozwiązań tego równania ma postać

$$L = \{\, x_0 + t\, v \mid t \in \mathbb{R} \,\}, \quad \text{gdzie} \quad v \in K = \{\, (x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \,\}.$$

Punkt x_0 prostej nazywamy jej punktem początkowym, a jednowymiarową przestrzeń K — *kierunkiem* (przestrzenią kierunkową) prostej L.
Proste o ty samym kierunku albo są identyczne, albo nie mają punktów wspólnych i z tego względu mówimy o nich, że są *równoległe*.
Zauważmy, że przestrzeń kierunkowa prostej jest zbiorem wektorów proporcjonalnych do dowolnie wybranego niezerowego wektora z tej przestrzeni. Istotnie, każde rozwiązanie równania $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ ma postać $\lambda(-a_2,\, a_1)$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$. O wektorach z tej przestrzeni będziemy mówili, że są to *wektory kierunkowe prostej* lub też, że są to wektory *równoległe* do tej prostej.

Prosta w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ II

Dwie proste na płaszczyźnie o równaniach $a_1x_1 + a_2x_2 = a_3$ i $b_1x_1 + b_2x_2 = b_3$ przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy układ liniowy

$$a_1x_1 + a_2x_2 = a_3; \quad b_1x_1 + b_2x_2 = b_3$$

jest oznaczony, a to zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy obie macierze współczynników układu — rozszerzone i prosta — mają rząd 2;

$$r\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}\right) = 2.$$

Z macierzy współczynników możemy też odczytać, kiedy równania $a_1x_1 + a_2x_2 = a_3$ i $b_1x_1 + b_2x_2 = b_3$ opisują jedną i tę samą prostą — ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnej liczby $k \neq 0$, że $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2$ i $b_3 = ka_3$. Warunek ten zapisuje się często w postaci równości

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3},$$

przyjmując dodatkowo, że jeśli w jednym równaniu pewien współczynnik jest równy zeru, to w drugim równaniu odpowiadający mu współczynnik też musi być równy zeru.

Elementarny przykład

Z nauki geometrii pamiętamy, że dla każdych dwóch (różnych) punktów istnieje tylko jedna prosta przechodząca przez te punkty. Sposób wyznaczenia równania tej prostej ilustruje przykład.

Przykład

Wyznaczymy prostą na płaszczyźnie przechodzącą przez dane dwa punkty $p = (3, 2)$ i $q = (-1, -2)$. W tym celu równanie prostej zapiszemy w postaci (3) i poszukamy takich współczynników równania, żeby punkty p i q były jego rozwiązaniami. Podstawiając wartości współrzędnych otrzymujemy

$$a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 2 = b, \qquad a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot (-2) = b$$

a stąd wynika, że $a_1 = b$ i $a_2 = -b$. Jako b można obrać dowolną stałą różną od zera. Obierając $b = 1$ otrzymamy dla szukanej prostej równanie

$$x_1 - x_2 = 1.$$

Prostopadłość prostych (w przestrzeni $\mathbb{R}^2$)

Jeśli dane proste są opisane przez równania w postaci ogólnej (3),

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b, \qquad \text{odpowiednio} \qquad A_1x_1 + A_2x_2 = B,$$

to l_1 jest prostopadła do l_2 wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1A_1 + a_2A_2 = 0$.
Rzeczywiście, wektory kierunkowe tych prostych sa rozwiązaniami równania $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ i odpowiednio $A_1x_1 + A_2x_2 = 0$, a zatem mają postać $v_1 = \lambda(-a_2, a_1)$ i odpowiednio $v_1 = \mu(-A_2, A_1)$ ze współczynnikami $\lambda \neq 0$ i $\mu \neq 0$. Stąd

$$v_1 \cdot v_2 = \lambda\mu(a_1A_1 + a_2A_2) = 0 \qquad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \qquad a_1A_1 + a_2A_2 = 0.$$

Pomijając przypadek, gdy jedna z prostych jest równoległa do osi Ox_2, można wyrazić warunek prostopadłości za pomocą współczynników kierunkowych prostych w znanej ze szkoły średniej postaci

$$\frac{A_1}{A_2} = -\frac{a_2}{a_1}.$$

Dodatkowe własności prostych (w przestrzeni $\mathbb{R}^2$)

Równanie prostej można rozwiązać względem jednej ze współrzędnych otrzymując

$$x_2 = -\frac{a_1}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}, \qquad \text{w notacji szkolnej} \qquad y = ax + b, \tag{4}$$

lub

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 + \frac{b}{a_1}, \qquad \text{w notacji szkolnej} \qquad x = ay + b. \tag{5}$$

Czytelnik powinien sam ustalić, kiedy można otrzymać pierwsze, a kiedy drugie z podanych wyżej równań, jakie przy tym czynimy założenie i jakie jest geometryczne znaczenie tych założeń. Zwróćmy także uwagę na znaczenie współczynnika $-\frac{a_1}{a_2}$, nazywanego współczynnikiem kierunkowym prostej, który jest równy tangensowi kąta nachylenia prostej do (dodatniej pół)osi Ox_1. Wyznaczenie punktów przecięcia prostej z osiami współrzędnych pozostawiamy do samodzielnego rozwiązania.

Różne opisy płaszczyzny

Punkty przestrzeni $\mathbb{R}^3$ identyfikujemy używając trzech współrzędnych — symbolicznie zapisujemy $x \in \mathbb{R}^3$ w postaci $x = (x_1, x_2, x_3)$. Zgodnie z ogólną definicją, płaszczyzna jest przesuniętą podprzestrzenią liniową wymiaru 2, powiedzmy K, $\dim K = 2$. Ustalmy bazę $\{w_1, w_2\}$ przestrzeni K i wektor przesunięcia $u \in \mathbb{R}^3$. Wtedy każdy punkt $p \in P$ można zapisać w postaci, zwanej przedstawieniem parametrycznym płaszczyzny

$$p = u + t_1 w_1 + t_2 w_2, \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

przy czym liczby t_1, t_2 są **jednoznacznie** wyznaczone. Wartości $t_1 = 0 = t_2$ odpowiadają punktowi u płaszczyzny P, który nazywamy początkiem układu współrzędnych, a liczby t_1, t_2 nazywamy współrzędnymi punktu p względem układu odniesienia $\{u, w_1, w_2\}$. Można powiedzieć, że dwie liczby t_1, t_2 kodują położenie punktu p na płaszczyźnie (zamiast trzech jego kartezjańskich współrzędnych).

Zauważmy, że wektor przesunięcia nie jest zadany jednoznacznie — przesunięcia o wektory v i u generują tę samą płaszczyznę P wtedy i tylko wtedy, gdy $v - w \in K$.

Płaszczyzny w postaci parametrycznej

Przykłady

a) Oznaczmy $K_3 = \mathrm{lin}\{e_1, e_2\} = \{ (x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}$ — podprzestrzeń rozpiętą przez dwa pierwsze wersory układu (ortogonalne dopełnienie do e_3). Analogicznie określimy K_1 i K_2 jako ortogonalne dopełnienia do e_1 i e_2 odpowiednio.
Płaszczyzna $P_3 = \{ (x_1, x_2, 1) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}$ jest przesunięciem przestrzeni K_3 o wektor jednostkowy w kierunku trzeciej osi, $P_3 = \tau_{e_3}(K_3)$. Analogiczną interpretację mają przesunięcia przestrzeni K_1 i K_2 — szczegóły pozostawiamy czytelnikowi.
b) $P = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1 \}$ jest przesunięciem podprzestrzeni liniowej $K = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$. Jeśli jako wektor przesunięcia obrać $u = e_3$, a jako bazę przestrzeni kierunkowej wektory $w_1 = (1, 0, -1)$ i $w_2 = (0, 1, -1)$, to wierzchołki czworościanu wyciętego przez P z dodatniego oktantu $\{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \}$, tj. punkty $q_1 = (1, 0, 0)$ i $q_2 = (0, 1, 0)$ mają względem układu odniesienia $\{u, w_1, w_2\}$ współrzędne $(1, 0)$ i $(0, 1)$. Pozostawimy czytelnikowi wyznaczenie współrzędnych tych wierzchołków, gdy wektorem przesunięcia jest np. e_2, a wektory bazy pozostają te same.

Równanie płaszczyzny w $\mathbb{R}^3$

Stwierdzenie (Równanie ogólne płaszczyzny w $\mathbb{R}^3$)

Każda płaszczyzna w $\mathbb{R}^3$ jest zbiorem punktów $\mathbb{R}^3$ spełniających pewne równanie liniowe, nazywane równaniem ogólnym płaszczyzny w $\mathbb{R}^3$, o postaci

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b, \qquad \text{gdzie} \quad a_1,\, a_2,\, a_3,\, b \in \mathbb{R}, \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0. \quad (7)$$

Zbiór rozwiązań równania jednorodnego

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

jest przestrzenią kierunkową płaszczyzny o równaniu (7).
Płaszczyzny o tej samej przestrzeni kierunkowej są nazywane równoległymi.

Czasami mówimy także, że niezerowy wektor należący do przestrzeni kierunkowej prostej, odpow. płaszczyzny, jest do niej równoległy.

Równanie płaszczyzny przez zadane punkty

Wybór dwóch nie identycznych punktów wyznacza jednoznacznie prostą przez nie przechodzącą, a zadanie trzech niewspółliniowych punktów wyznacza jednoznacznie płaszczyznę zawierającą te punkty. Punkty p^1, p^2, p^3 są niewspółliniowe, wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $v_1 = p^3 - p^1$, $v_2 = p^2 - p^1$ są liniowo niezależne.

Stwierdzenie

Jeśli punkty $p^1 = (p_1^1, p_2^1, p_3^1)$, $p^2 = (p_1^2, p_2^2, p_3^2)$, $p^3 = (p_1^3, p_2^3, p_3^3) \in \mathbb{R}^3$ nie są współliniowe, to płaszczyzna P zawierająca te punkty jest zbiorem

$$P = P(p^1, p^2, p^3) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ p_1^1 & p_2^1 & p_3^1 & 1 \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 & 1 \\ p_1^3 & p_2^3 & p_3^3 & 1 \end{bmatrix} = 0 \right\}. \quad (8)$$

Mówi się wówczas, że płaszczyzna P jest wyznaczona przez równanie

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ p_1^1 & p_2^1 & p_3^1 & 1 \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 & 1 \\ p_1^3 & p_2^3 & p_3^3 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Prosta w $\mathbb{R}^3$

Inaczej niż płaszczyzna, prosta w $\mathbb{R}^3$ jest opisana nie jednym równaniem, ale układem co najmniej dwóch równań liniowych. Wektorem kierunkowym prostej wyznaczonej przez punkty $p = (p_1, p_2, p_3)$, $q = (q_1, q_2, q_3)$ jest wektor $v = (p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3)$, a samą prostą można zadać w postaci parametrycznej $L = \{ x = (q_1, q_2, q_3) + t(p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3) \mid t \in \mathbb{R} \}$.

Stwierdzenie (Równania prostej w przestrzeni $\mathbb{R}^3$)

Jeśli układ równań

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \end{aligned} \tag{9}$$

jest niesprzeczny oraz rząd macierzy współczynników układu $A = [a_{ij}] \in \mathbf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ *jest równy* 2, *to zbiór wszystkich rozwiązań tego układu równań liniowych jest prostą w przestrzeni* $\mathbb{R}^3$.
Układ równań (9) *nazywamy układem krawędziowym równań prostej.*

Przykłady: płaszczyzna i prosta w $\mathbb{R}^3$

Przykład

a) Przez punkty $p^1 = (1, 0, 0)$, $p^2 = (0, 1, 0)$, $p^3 = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ przechodzi płaszczyzna o równaniu

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0.$$

b) Prosta przechodząca przez punkty $p = (2, 3, 4)$, $q = (0, 0, 1)$ ma przedstawienie parametryczne

$$L = \{\, x = (0, 0, 1) + t(2\,3\,3) \mid t \in \mathbb{R} \,\}, \qquad \text{lub}$$
$$x_1 = 2t, \qquad x_2 = 3t, \qquad x_3 = 1 + 3t.$$

Po wyeliminowaniu parametru t z tych równań dostajemy układ równań

$$\frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{3}(x_3 - 1).$$

Inne spojrzenie na równania prostej i płaszczyzny

W równaniach (7) i (3) współczynniki a_1, a_2, a_3, odpowiednio a_1, a_2, potraktujemy jako współrzędne wektora $A = (a_1,\, a_2,\, a_3) \in \mathbb{R}^3$, odpowiednio $A = (a_1,\, a_2) \in \mathbb{R}^2$, przy czym na mocy założenia będzie $A \neq 0$.
Zatem $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 =$ (odpowiednio, $a_1x_1 + a_2x_2 =$) $A \cdot x$, gdzie $x \in \mathbb{R}^3$ (odpowiednio, $x \in \mathbb{R}^2$), co pozwala zapisać oba równania w postaci

$$A \cdot x = b, \qquad \text{gdzie } x = (x_1,\, \dots,\, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \text{odpow. } x = (x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Stąd wnioskujemy, że dla dwóch dowolnych (różnych) punktów p, q należących do płaszczyzny (prostej, odpowiednio) wektor v łączący p z q (wektor przesunięcia z p do q) jest ortogonalny do A

$$A \cdot v = A \cdot (q - p) = A \cdot q - A \cdot p = 0.$$

Odwrotnie, jeśli v jest wektorem kierunkowym płaszczyzny (prostej), to na mocy samej definicji $A \cdot v = 0$. Dlatego wektor A nazywamy wektorem normalnym płaszczyzny (prostej).

Inne spojrzenie na równania prostej i płaszczyzny

Wniosek

Każdą płaszczyznę w $\mathbb{R}^3$ *można przedstawić za pomocą równania*

$$A \cdot (x - p_0) = 0, \qquad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \tag{10}$$

gdzie p_0 *jest dowolnie wybranym punktem tej płaszczyzny i* $A = (a_1, a_2, a_3)$ *jest wektorem normalnym (ortogonalnym do przestrzeni kierunkowej) tej płaszczyzny.*

Analogicznie, każdą prostą na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ *można przedstawić za pomocą równania*

$$A \cdot (x - p_0) = 0, \qquad \text{gdzie } A = (a_1, a_2), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{11}$$

dla dowolnie wybranego punktu p_0 *tej prostej.*

Odległość punktu od zbioru

Jest naturalne, aby najmniejszą długość wektora leżącego w danym zbiorze uznać jako odległość tego zbioru od początku układu współrzędnych.

Definicja (Odległość punktu od zbioru)

Dla $p \in \mathbb{R}^n$ i dowolnego niepustego zbioru $F \subset \mathbb{R}^n$ określamy liczbę $d(p, F)$, nazywaną *odległością punktu p od zbioru F*, za pomocą wzoru

$$d(p, F) = \inf\{ d(p, z) \mid z \in F \}. \tag{12}$$

Uwaga

Trzeba podkreślić, że w ogólnym przypadku w zbiorze F może nie być wcale takiego punktu, który leżałby w najmniejszej odległości od danego punktu p — inaczej mówiąc, funkcja $z \mapsto d(p, z)$ w żadnym punkcie nie osiąga swojego infimum. Z wykładów analizy matematycznej dobrze wiadomo, że nie każda funkcja osiąga swoje infimum. W rozważanym przypadku płaszczyzny lub prostej taki punkt jednak zawsze istnieje i co więcej, jest jedyny.

Odległość punktu od płaszczyzny w $\mathbb{R}^3$

Stwierdzenie

Niech P będzie płaszczyzną w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ zadaną równaniem $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + d = 0$ i niech $p = (p_1, p_2, p_3)$ będzie punktem $\mathbb{R}^3$. Oznaczmy przez $n = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}(a_1, a_2, a_3)$ unormowany wektor normalny do płaszczyzny P. Jeśli oznaczyć $\delta = \inf\{\, d(p, z) \mid z \in P \,\} = d(p, P)$, to

$$d(p, P) = \left| \frac{a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + d}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right|$$

a punkt $q \in P$, dla którego spełniony jest warunek $d(p, q) = \delta$ wyraża się wzorem

$$q = \pm\delta n + p,$$

gdzie znak przed czynnikiem δ wybrany jest tak, aby wektor $\pm\delta n$ był skierowany od p do płaszczyzny P.
Ten punkt q nazywamy rzutem prostopadłym punktu p na płaszczyznę P.

Nowe iloczyny wektorów w $\mathbb{R}^3$

Definicja (Iloczyn wektorowy i mieszany w $\mathbb{R}^3$)

Iloczynem wektorowym $v, w \in \mathbb{R}^3$ jest wektor $v \times w \in \mathbb{R}^3$ określony przez

$$v \times w = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} e_3. \tag{13}$$

Formalnie, prawą stronę wzoru traktujemy jako rozwinięcie wyznacznika

$$v \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}, \tag{14}$$

Iloczynem mieszanym wektorów u, v, w nazywamy liczbę $M(u, v, w)$ daną równoważnymi wyrażeniami

$$M(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = u \cdot (v \times w). \tag{15}$$

Własności iloczynu wektorowego w $\mathbb{R}^3$ I

Geometryczne własności podanych konstrukcji.

Stwierdzenie

Dla danych wektorów u, v, $w \in \mathbb{R}^3$
a) Wektor $v \times w$ *jest ortogonalny do obu wektorów* v *i* w*;*
b) Długość wektora $v \times w$ *jest równa polu równoległoboku zbudowanego na wektorach* v, w*;*
c) Wartość bezwzględna iloczynu mieszanego $(u \times v) \cdot w$ *jest objętością równoległościanu utworzonego przez wektory* u, v, w*.*

Własność **a)** wynika bezpośrednio ze wzoru (14) — wyznacznik, w którym dwa wiersze są identyczne, jest równy zeru.
Najpierw przypomnijmy, że pole S równoległoboku o bokach v, w tworzących kąt φ (to jest gdy $v \cdot w = |v||w| \cos \varphi$) jest równe

$$S = |v||w| \sin \varphi.$$

Własności iloczynu wektorowego w $\mathbb{R}^3$ II

Własność **b)** wynika z tego wzoru na podstawie interesującej algebraicznej tożsamości

$$(v_2 w_3 - v_3 w_2)^2 + (v_1 w_3 - v_3 w_1)^2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 =$$
$$(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2.$$

W lewej stronie tej tożsamości rozpoznajemy kwadrat długości wektora $v \times w$

$$|v \times w|^2 = (v_2 w_3 - v_3 w_2)^2 + (v_1 w_3 - v_3 w_1)^2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2$$

a po drugiej stronie mamy

$$(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2$$
$$= |v|^2|w|^2 - (v \cdot w)^2 = |v|^2|w|^2 - (|v||w| \cos\varphi)^2 = |v|^2|w|^2(1 - \cos^2\varphi)$$

Własności iloczynu wektorowego w $\mathbb{R}^3$, III

Stwierdzenie

Iloczyn wektorowy w $\mathbb{R}^3$ *jest odwzorowaniem* $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ni (v, w) \mapsto v \times w \in \mathbb{R}^3$ *o następujących własnościach: Dla dowolnych wektorów* $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ *są spełnione*

(i) $v \times w = -w \times v,$ **(antysymetria)**

(ii) $(\alpha u + \beta w) \times v = \alpha(u \times v) + \beta(w \times v),$

$v \times (\alpha u + \beta w) = \alpha(v \times u) + \beta(v \times w),$ **(jednostronna liniowość)**

(iii) $v \times v = 0;$

(iv) $u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w.$

Iloczyn mieszany jest odwzorowaniem, które trójce wektorów z $\mathbb{R}^3$ *przyporządkowuje liczbę,*

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \ni (u, v, w) \mapsto M(u, v, w) = u \cdot (v \times w) \in \mathbb{R},$$

równą „zorientowanej” objętości równoległoboku wyznaczonego przez te wektory.